Aufgaben zum Tut am 09.01.2007

Thomas Pajor

9. Januar 2007

Aufgabe 1.

Seien L_1 und L_2 Sprachen über Σ. Beweisen Sie:

(a) Die semientscheidbaren Sprachen sind unter Komplementbildung nicht abgeschlossen

(b) Die semientscheidbaren Sprachen sind unter Vereinigung und Durchschnitt abgeschlossen

(c) Sind L_1 und L_2 entscheidbar, so ist auch $L_1 \setminus L_2$ entscheidbar.

Lösung

(a) Sei L_1 semientscheidbar. Das heißt, es existiert eine Turingmaschine, die bei Eingabe $w \in L_1$ hält.

Annahme: L_1^c ebenfalls semientscheidbar. Also gibt es auch eine Turingmaschine, die bei Eingabe $w \notin L_1$ hält.

$\Rightarrow$ Es gibt eine Turingmaschine die sowohl für $w \in L_1$ alsauch für $w \notin L_1$ hält.

$\Rightarrow$ L_1 ist entscheidbar. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also sind die semientscheidbaren Sprachen unter Komplementbildung nicht abgeschlossen.

(b) Seien L_1 und L_2 semientscheidbar und

$$\mathcal{T}_1 := (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, s_1, F_1) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{T}_2 := (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, s_2, F_2)$$

die TMs so, dass $\mathcal{T}_1$ akzeptiert falls $w \in L_1$ und $\mathcal{T}_2$ akzeptiert falls $w \in L_2$.

Konstruiere nun eine neue 2–Band–, 2–Kopf–Turingmaschine $\mathcal{T} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ wie folgt:

- $Q := Q_1 \times Q_2$

- $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
- $s := (s_1, s_2)$
- Hier unterscheiden wir zwischen „Vereinigung“ und „Durchschnitt“:

$$F := \begin{cases} \{(q_1, q_2) \in Q \mid q_1 \in F_1 \wedge q_2 \in F_2\} & \text{falls} \quad L_1 \cap L_2 \\ \{(q_1, q_2) \in Q \mid q_1 \in F_1 \vee q_2 \in F_2\} & \text{falls} \quad L_1 \cup L_2 \end{cases}$$

- $\delta((q_1, q_2), a, b) := ((p_1, p_2), c, d, X, Y)$ wobei $\delta_1(q_1, a) = (p_1, c, X)$ und $\delta_2(q_2, b) = (p_2, d, Y)$.

Da jede n–Band, k–Kopf Turingmaschine durch eine normale Turingmaschine simuliert werden kann, leistet $\mathcal{T}$ das Gewünschte.

(c) Seien L_1 und L_2 entscheidbar. Dann sind ihre charakteristischen Funktionen χ_1 und χ_2, gegeben durch

$$\chi_i := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad w \in L_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1..2$$

berechenbar.

Also lässt sich eine Turingmaschine $\mathcal{T}$ bauen die

$$\chi := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad w \in L_1 \wedge w \notin L_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet.

$\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ ist entscheidbar.

Aufgabe 2.

Geben Sie ein LOOP–Programm an, das die Addition zweier natürlicher Zahlen x_1 und x_2 realisiert. Geben Sie außerdem ein LOOP–Programm an, das das Konstrukt

IF $(x_1 = 0)$ THEN $\{\ A\ \}$

berechnet. Dabei sind nur die in der Vorlesung genannten Sprachelemente erlaubt.

Lösung.

```
addition(x1, x2) {
  nat x0 = 0;

```

```
  x0 := x1;

  LOOP x2 DO {
        x0 = x0 + 1;
  }

  RETURN x0;
}
```

Das `IF THEN` Statement könnte so aussehen:

```
y := 1;
LOOP x DO {
        y := 0;
}
LOOP y DO {
        A;
}
```

Aufgabe 3.

Sei $\chi : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ eine LOOP–berechenbare Funktion auf den natürlichen Zahlen. Die beschränkte Generalisierung $\bigwedge_{i=1}^{n}$ ist definiert durch

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \chi(i) := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \forall i \leq n : \chi(i) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Angabe eines LOOP–Programms dass die beschränkte Generalisierung LOOP–berechenbar ist.

Lösung.

```
gen(x1) {
  nat x0 = 0;
  nat x2 = 0;

  x0 := x0 + 1;

  LOOP x1 DO {
    IF (chi(x1) = 0) THEN {
      x0 := 0;
```

```
    }
    x1 := x1 - 1;
  }

  IF (chi(0) = 0) THEN {
    x0 := 0;
  }

  RETURN x0;
}
```