Aufgaben zum Glühwein–Tut am 19.12.2006

Thomas Pajor

20. Dezember 2006

Aufgabe 1.

Konstruieren Sie eine (deterministische) Turingmaschine $\mathcal{M}$ die zu einer auf dem Band stehenden Binärzahl $w \in \{0,1\}^*$ (binär) eins addiert. Dabei sei die Eingabe w frei von führenden Nullen.

Lösung

Die in Abbildung (1) dargestellte Turingmaschine leistet das Gewünschte.

Funktionsweise: Die Turingmaschine liest die erste 1 und geht in den Zustand q_1. Hier fährt sie mit dem Kopf bis ans Ende des Wortes. Im Zustand q_2 geht sie das Wort nun rückwärts ab und ersetzt jede 1 durch eine 0. Wird irgendwann eine 0 gelesen so fährt sie den Kopf bis ans Anfang des Wortes (via q_3) und hält in f. Wird keine 0, sondern ein $\sqcup$ gelesen, so wird dieses durch eine 1 ersetzt und die TM hält ebenfalls in f.

Die Zustände q_4 und q_5 dienen der Sonderbehandlung für $w = 0$.

Aufgabe 2.

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und seien induktiv die folgenden Mengen definiert:

$$\begin{aligned} X_0 &:= \Sigma \\ X_{n+1} &:= X_n \cup \{A \mid A \in V, \exists z \in X_n^* : A \to z\} \end{aligned}$$

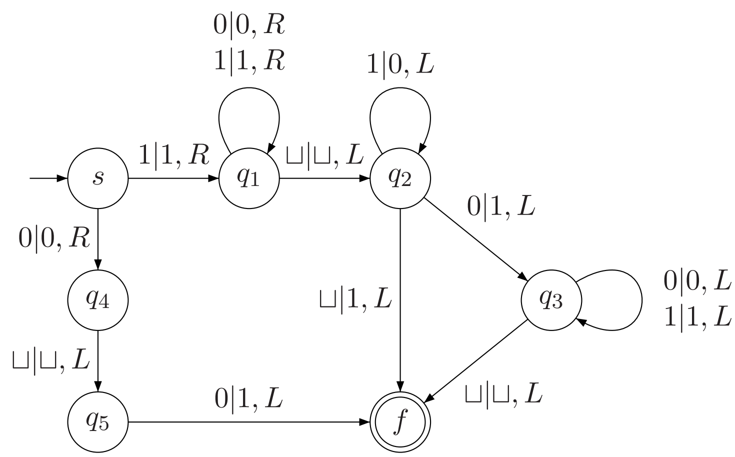

Abbildung 1: Turingmaschine die binär $+1$ addiert.

(a) Zeigen Sie: $X_i \subseteq X_{i+1}$ für alle i und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k = X_{k+1}$ und falls $X_k = X_{k+1}$ so ist auch $X_k = X_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

(b) Zu jedem $A \in V$ sei

$$L(A) = \{z \mid z \in \Sigma^*, A \overset{*}{\Rightarrow} z\}$$

Zeigen Sie, dass $L(A) \neq \emptyset$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $A \in X_n$.

(c) Die Definition der X_i lassen sich als Verfahren benutzen um zu prüfen ob die durch eine kontextfreie Grammatik G erzeugte Sprache leer ist. Geben Sie den worst–case Aufwand asymptotisch im $\mathcal{O}$ Kalkül an.

Lösung.

(a) $X_i \subseteq X_{i+1}$ folgt unmittelbar aus der Definition. Da $|V| < \infty$ kann es keine unendliche *echt* aufsteigende Kette geben, somit existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k = X_{k+1}$.

Dass nun $X_k = X_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, beweisen wir durch vollständige Induktion über r.

IA: $r = 1$: Dies ist die Voraussetzung.

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes r.

IS: $r \rightsquigarrow r + 1$: Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} X_{k+r+1} &= X_{k+r} \cup \{A \mid A \in V \text{ und es gibt } z \in X_{k+r}^* \text{ mit } A \to z\} \\ &\overset{\text{IV}}{=} X_k \cup \{A \mid A \in V \text{ und es gibt } z \in X_k^* \text{ mit } A \to z\} \\ &= X_{k+1} \\ &= X_k \end{aligned}$$

$\square$

(b) Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

„$\Leftarrow$“: Wir zeigen $A \in X_n \Rightarrow L(A) \neq \emptyset$ durch Induktion über n:

IA: $n = 1$. Sei $A \in X_1$, dann gibt es nach Definition ein $z \in X_0^* = \Sigma^*$ mit $A \Rightarrow z$, somit ist $z \in L(A)$ und $L(A) \neq \emptyset$.

IV: Die Behauptung gelte für ein festes n.

IS: $n \rightsquigarrow n+1$. Sei $A \in X_{n+1}$, dann ist $A \in X_n$ oder es gibt ein $z \in X_n^*$ mit $A \Rightarrow z$. Ist $A \in X_n$, so folgt $L(A) \neq 0$ aus der IV.
Im anderen Fall betrachten wir jede Variable B die in z enthalten ist. Weil $z \in X_n^*$ ist, ist auch $B \in X_n^*$. Aus der IV folgt nun $L(B) \neq \emptyset$, also insbesondere existiert ein z_B wobei $B \Rightarrow z_B$ mit $z_B \in \Sigma^*$. Also existiert eine Kette von Ableitungen

$$A \Rightarrow z \overset{*}{\Rightarrow} z_A \qquad z_A \in \Sigma^*$$

und somit ist $L(A) \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“: Sei $L(A) \neq \emptyset$, also gibt es ein Wort $z \in \Sigma^*$ mit $A \overset{*}{\Rightarrow} z$, also eine Ableitungskette der Form

$$A =: z_n \Rightarrow z_{n-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow z_0 := z$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion über i dass für jede Variable $B \in V$ gilt: Kommt B in z_i vor, dann gilt $B \in X_i$, also $z_i \in X_i^*$.

IA: Für $i = 0$ ist $z_0 = z \in \Sigma^* = X_0^*$.

IV: Behauptung gelte für festes n.

IS: $i \rightsquigarrow i+1$.
Sei B also in z_{i+1}. Der Ableitungsschritt $z_{i+1} \Rightarrow z_i$ wird durch eine Produktion $Z \Rightarrow R$ erzeugt. Dann gilt $z_{i+1} = uZv$ und $z_i = uRv$. Ist B auch in z_i, so folgt die Behauptung mit der IV.
Sei nun B nicht in z_i, dann wurde B durch die Produktion $Z \Rightarrow R$ gelöscht, also gilt $Z = B$ und nach Konstruktion von X_{i+1} ist $B \in X_{i+1}$.

Also folgt aus $L(A) \neq \emptyset$, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $A \in X_n$.

$\square$

(c) Sei $|V| =: k$, dann endet nach Aufgabe (a) das Verfahren spätestens nach Konstruktion von X_k. Im schlimmsten Fall muss man in jedem Schritt jede Produktion testen, also ist der Aufwand des Verfahrens in $\mathcal{O}(|P| \cdot |V|)$.