

Aufgaben zum Glühwein–Tut am 12.12.2006

Thomas Pajor

18. Dezember 2006

Aufgabe 1.

Sei $G := (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und seien induktiv die folgenden Mengen definiert:

$$X_0 := \Sigma$$
$$X_{n+1} := X_n \cup \{A \mid A \in V, \exists z \in X_n^* : A \rightarrow z\}$$

- (a) Zeigen Sie: $X_i \subseteq X_{i+1}$ für alle i und es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k = X_{k+1}$ und falls $X_k = X_{k+1}$ so ist auch $X_k = X_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$.
- (b) Zu jedem $A \in V$ sei

$$L(A) = \{z \mid z \in \Sigma^*, A \xRightarrow{*} z\}$$

Zeigen Sie, dass $L(A) \neq \emptyset$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $A \in X_n$.

- (c) Die Definition der X_i lassen sich als Verfahren benutzen um zu prüfen ob die durch eine kontextfreie Grammatik G erzeugte Sprache leer ist. Geben Sie den worst–case Aufwand asymptotisch im \mathcal{O} Kalkül an.

Lösung.

- (a) $X_i \subseteq X_{i+1}$ folgt unmittelbar aus der Definition. Da $|V| < \infty$ kann es keine unendliche *echt* aufsteigende Kette geben, somit existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $X_k = X_{k+1}$.

Dass nun $X_k = X_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt, beweisen wir durch vollständige Induktion über r .

IA: $r = 1$: Dies ist die Voraussetzung.

IV: Die Behauptung gelte für ein beliebiges aber festes r .

IS: $r \rightsquigarrow r + 1$: Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} X_{k+r+1} &= X_{k+r} \cup \{A \mid A \in V \text{ und es gibt } z \in X_{k+r}^* \text{ mit } A \rightarrow z\} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} X_k \cup \{A \mid A \in V \text{ und es gibt } z \in X_k^* \text{ mit } A \rightarrow z\} \\ &= X_{k+1} \\ &= X_k \end{aligned}$$

□

(b) Wir zeigen die Behauptung in zwei Schritten.

„ \Leftarrow “: Wir zeigen $A \in X_n \Rightarrow L(A) \neq \emptyset$ durch Induktion über n :

IA: $n = 1$. Sei $A \in X_1$, dann gibt es nach Definition ein $z \in X_0^* = \Sigma^*$ mit $A \Rightarrow z$, somit ist $z \in L(A)$ und $L(A) \neq \emptyset$.

IV: Die Behauptung gelte für ein festes n .

IS: $n \rightsquigarrow n + 1$. Sei $A \in X_{n+1}$, dann ist $A \in X_n$ oder es gibt ein $z \in X_n^*$ mit $A \Rightarrow z$.

Ist $A \in X_n$, so folgt $L(A) \neq \emptyset$ aus der IV.

Im anderen Fall betrachten wir jede Variable B die in z enthalten ist. Weil $z \in X_n^*$ ist, ist auch $B \in X_n^*$. Aus der IV folgt nun $L(B) \neq \emptyset$, also insbesondere existiert ein z_B wobei $B \Rightarrow z_B$ mit $z_B \in \Sigma^*$. Also existiert eine Kette von Ableitungen

$$A \Rightarrow z \stackrel{*}{\Rightarrow} z_A \quad z_A \in \Sigma^*$$

und somit ist $L(A) \neq \emptyset$.

„ \Rightarrow “: Sei $L(A) \neq \emptyset$, also gibt es ein Wort $z \in \Sigma^*$ mit $A \stackrel{*}{\Rightarrow} z$, also eine Ableitungskette der Form

$$A =: z_n \Rightarrow z_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow z_0 := z$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion über i dass für jede Variable $B \in V$ gilt: Kommt B in z_i vor, dann gilt $B \in X_i$, also $z_i \in X_i^*$.

IA: Für $i = 0$ ist $z_0 = z \in \Sigma^* = X_0^*$.

IV: Behauptung gelte für festes n .

IS: $n \rightsquigarrow n + 1$.

Sei B also in z_{i+1} . Der Ableitungsschritt $z_{i+1} \Rightarrow z_i$ wird durch eine Produktion $Z \Rightarrow R$ erzeugt. Dann gilt $z_{i+1} = uZv$ und $z_i = uRv$. Ist B auch in z_i , so folgt die Behauptung mit der IV.

Sei nun B nicht in z_i , dann wurde B durch die Produktion $Z \Rightarrow R$ gelöscht, also gilt $Z = B$ und nach Konstruktion von X_{i+1} ist $B \in X_{i+1}$.

Also folgt aus $L(A) \neq \emptyset$, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $A \in X_n$.

□

- (c) Sei $|V| =: k$, dann endet nach Aufgabe (a) das Verfahren spätestens nach Konstruktion von X_k . Im schlimmsten Fall muss man in jedem Schritt jede Produktion testen, also ist der Aufwand des Verfahrens in $\mathcal{O}(|P| \cdot |V|)$.