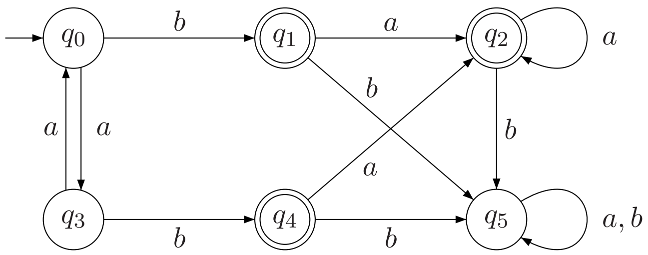
Aufgaben zum Tut am 28.11.2006

Thomas Pajor

28. November 2006

Aufgabe 1.

Gegeben sei folgender DEA $\mathcal{A} := (Q, \{a, b\}, \delta, q_0, F)$



Bestimmen Sie einen äquivalenten, minimalen DEA.

Lösung.

Wir suchen nach Zeugen für die Nichtäquivalenz von Zuständen und wenden das Verfahren aus dem Tutorium an. Ausgehend von einer „Äquivalenzklasse“, die alle Zustände enthält, versuchen wir diese sukzessive aufzutrennen in dem wir Elemente finden die nicht äquivalent sind.

- Sei zu Beginn $A := Q$.
- Wörter der Länge 0: ε.

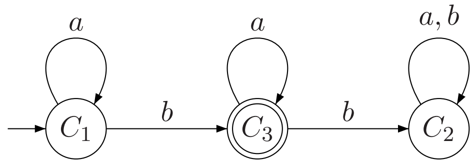
  Das leere Wort ε trennt die Endzustände von den Nicht–Endzuständen. A wird also in $B_1 := \{q_0, q_3, q_5\}$ und $B_2 := \{q_1, q_2, q_4\}$ getrennt.
- Wörter der Länge 1: a, b

  - a trennt weder B_1 noch B_2.
  - b trennt B_1 in $C_1 := \{q_0, q_3\}$ und $C_2 := \{q_5\}$. B_2 wird nicht getrennt, also $C_3 := B_2$.

- Wörter der Länge 2: aa, ab, ba, bb

  Keines dieser Wörter trennt C_1 oder C_2 oder C_3. Das Verfahren kann also abgebrochen werden.

Der Äquivalenzklassenautomat $\mathcal{A}^{\equiv} := (Q^{\equiv}, \Sigma, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ ist gegeben durch



Aufgabe 2.

Vermöge $\Sigma := \{0, 1\}$, und sei $L \subseteq \Sigma^*$ definiert durch

$$L := \{1^{2j} \mid j \geq 1\}$$

(a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von Σ^* bezüglich der Nerode Relation zu L.

(b) Leiten Sie aus den Äquivalenzklassen einen (minimalen) DEA ab.

Lösung.

(a) Folgende Äquivalenzklassen ergeben sich:

- $[\varepsilon] := \{\varepsilon\}$
- $[0] := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält die } 0\}$
- $[1] := \{w \in \Sigma^* \mid w = 1^{2k-1}, k \in \mathbb{N}\}$
- $[11] := \{w \in \Sigma^* \mid w = 1^{2k}, k \in \mathbb{N}\}$

Offensichtlich sind alle Wörter $w \in \Sigma^*$ durch eine Klasse abgedeckt, das heißt es existieren keine weiteren Klassen. Man kann sich anhand der Repräsentanten auch klarmachen dass keine zwei Klassen zusammenfallen, da alle Repräsentanten nicht zueinander äquivalent sind (Zum Beispiel: $1 \not\equiv 11$ denn für $z = 1$ gilt $1z \in L$ aber $11z \notin L$).

(b) Der minimale DEA ist in Abbildung (1) angegeben.

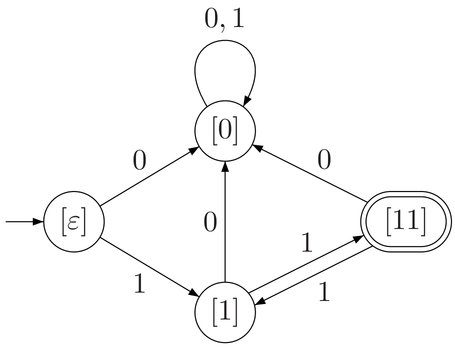


Abbildung 1: Minimaler DEA zu Aufgabe 1b)

Aufgabe 3.

Sei $L := \{a^j b^k c^l \mid j, k, l \geq 0 \text{ und } k = l \text{ falls } j = 1\}$ mit $\Sigma := \{a, b, c\}$.

(a) Zeigen Sie, dass L alle Bedingungen des Pumping Lemma erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass L trotzdem nicht regulär ist.

Lösung.

(a) Sei n die Pumping Lemma Zahl. Betrachte alle Wörter $w \in L$ mit $|w| > n$. Es gibt nun folgende drei Fälle zu unterscheiden:

- w enthält genau ein a. Das Wort hat also die Form $ab^k c^k$. Wähle als Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon$ und $v = a$. Es ist also $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ erfüllt. Damit ist aber auch für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ das Wort $uv^i x = a^i b^k c^k \in L$.
- w enthält genau zwei as. Wähle als Zerlegung $w = uvx$ mit $u = \varepsilon$ und $v = aa$. Damit ist auch $uv^i x \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
- w enthält kein a oder mehr als 2 as. Wähle als Zerlegung $w = uvx$ wieder $u = \varepsilon$ und $v = w_1$ wobei w_1 der erste Buchstabe von w ist. Ist $w_1 = a$, so gilt $|w|_a > 2$ und es gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$ dass $|uv^i x|_a > 1$ und somit ist $uv^i x \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Ist $w_1 \neq a$, so ist $w_1 = b$ oder $w_1 = c$ und damit auf triviale Weise $uv^i x \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

L erfüllt also die Bedingungen des Pumping Lemmas.

(b) Wir zeigen $\mathrm{index}(R_L) = \infty$, wobei R_L die Nerode Relation von L bezüglich Σ^* ist. Dann folgt mit dem Satz von Nerode, dass L nicht regulär ist.

Betrachte für beliebiges $k \geq 0$ folgende Äquivalenzklassen $A_k := [ab^{n+k}c^n]_\sim$, also

$$
\begin{aligned}
&[ab^n c^n]_\sim := \{a, abc, abbcc, abbbccc, \ldots\}\\
&[ab^{n+1} c^n]_\sim := \{ab, abbc, abbbcc, \ldots\}\\
&[ab^{n+2} c^n]_\sim := \{abb, abbbc, abbbbcc, abbbbbccc, \ldots\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Jede dieser Klassen enthält nur äquivalente Wörter, denn es gilt für zwei Wörter $w_1, w_2 \in A_k$

$$w_1 z \in L \quad \Leftrightarrow \quad z = c^k \quad \Leftrightarrow \quad w_2 z \in L$$

Außerdem fallen keine zwei paarweise verschiedenen Klassen A_k und A_l zusammen, da für zwei beliebige Wörter $w_1 \in A_k$ und $w_2 \in A_l$ gilt

$$w_1 z \in L \quad \Leftrightarrow \quad z = c^k \quad \overset{l \neq k}{\Leftrightarrow} \quad z \neq c^l \quad \Leftrightarrow \quad w_2 z \notin L$$

$\Rightarrow \Sigma^*$ zerfällt über R_L in unendlich viele Äquivalenzklassen und damit folgt mit dem Satz von Nerode dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie folgende, induktive Definition von regulären Sprachen.

Sei Σ ein Alphabet.

IA: $L = \emptyset$, $L = \{\varepsilon\}$, $L = \{a\}$ für $a \in \Sigma$ sind regulär.

IV: Sind L_1, L_2 zwei reguläre Sprachen, so sind auch…

IS: (a) $L = L_1 \cdot L_2$
(b) $L = L_1 \cup L_2$
(c) $L = L_1^*$
…regulär.

Beweisen Sie:

(a) $L^c = \Sigma^* \setminus L$ ist regulär, wenn L eine reguläre Sprache ist.

(b) $L_1 \cap L_2$ ist regulär, wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind.

Lösung.

(a) Zu jeder regulären Sprache L existiert ein deterministischer endlicher Automat $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der genau L akzeptiert. Durch Vertauschen der Endzustände mit den nicht–Endzuständen können wir einen neuen Automat $\tilde{\mathcal{A}} := (Q, \Sigma, \delta, s, Q \backslash F)$ angeben, der genau dann ein Wort akzeptiert, wenn $\mathcal{A}$ das Wort nicht akzeptiert hat. $\tilde{\mathcal{A}}$ akzeptiert also L^c. Damit ist L^c eine reguläre Sprache.

(b) Nach dem Gesetz von DeMorgan gilt

$$L_1 \cap L_2 = (L_1^c \cup L_2^c)^c$$

Das Komplement einer regulären Sprache ist nach Aufgabenteil (a) Regulär. Die Vereinigung zweier regulärer Sprachen ist nach Definition regulär. Damit folgt $L_1 \cap L_2$ ist regulär.