Aufgaben zum Tut am 21.11.2006

Thomas Pajor

21. November 2006

Aufgabe 1.

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping Lemma, dass die Sprache der Palindrome gerader Länge, also

$$L := \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$$

nicht regulär ist.

Lösung.

Sei n die Pumping Lemma Zahl und sei zu jedem n das Wort $w = 0^n 110^n \in L$. Also ist $|w| > n$. Es gilt dann für alle Zerlegungen $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \varepsilon$

$$uv^0w = 0^l 110^n \quad \text{wobei} \quad l < n$$

Also ist $uv^0w \notin L$.

$\Rightarrow L$ ist nicht regulär. $\square$

Aufgabe 2.

Zu $\Sigma := \{0\}$ sei die Sprache

$$L := \{0^{k^2} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

also die Sprache aller Wörter mit quadratischer Länge, definiert.

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemma, dass L nicht regulär ist.

Ist die Sprache $L_N := \{0^{k^2} \mid k \leq N\}$ regulär?

Lösung.

Sei $n \in \mathbb{N}$ die Zahl aus dem Pumping Lemma. Betrachte zu jedem n das Wort $w = 0^{n^2} \in L$, bzw. $w = 0^4$, falls $n = 1$. Somit ist $|w| > n$ für jedes n erfüllt.

Sei nun $w = uvx$ eine beliebige Zerlegung von w wobei gelte $|uv| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$. Für jede Wahl von u,v und x gilt jedoch

$$uv^2x = 0^{n^2+|v|} \notin L$$

denn

$$n^2 < n^2 + |v| \leq n^2 + n < (n+1)^2$$

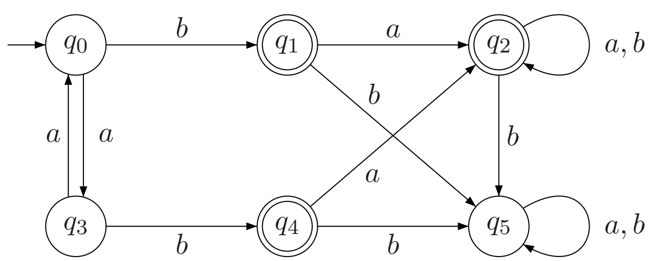
Somit gibt es kein $k \in \mathbb{N}$ mit $0^{n^2+|v|} = 0^{k^2}$.

$\Rightarrow L$ ist nicht regulär. $\square$

Zu einem $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Sprache $L_N := \{0^{k^2} \mid k \leq N\}$. Diese besteht aus allen Wörtern quadratischer Länge bis zu einem festen k. Das bedeutet, dass L_N nur endlich viele Wörter enthält. Eine endliche Sprache ist aber immer regulär, denn es kann auf kanonische Weise ein NEA mit endlich vielen Zuständen konstruiert werden, der L_N akzeptiert. Konstruiere dafür ausgehend vom Startzustand für jedes Wort $w \in L_N$ eine Zustandskette die genau die Übergänge aus w enthält und in einem Endzustand endet.

Aufgabe 3.

Gegeben sei folgender DEA $\mathcal{A} := (Q, \{a, b\}, \delta, s, F)$



Bestimmen Sie einen äquivalenten, minimalen DEA.

Lösung.

Wir suchen nach Zeugen für die Nichtäquivalenz von Zuständen und wenden das Verfahren aus dem Tutorium an. Ausgehend von einer „Äquivalenzklasse“, die alle Zustände enthält, versuchen wir diese sukzessive aufzutrennen in dem wir Elemente finden die nicht äquivalent sind.

- Sei zu Beginn $A := Q$.
- Wörter der Länge 0: ε.

  Das leere Wort ε trennt die Endzustände von den Nicht–Endzuständen. A wird also in $B_1 := \{q_0, q_3, q_5\}$ und $B_2 := \{q_1, q_2, q_3\}$ getrennt.
- Wörter der Länge 1: a, b
  - a trennt weder B_1 noch B_2.
  - b trennt B_1 in $C_1 := \{q_0, q_3\}$ und $C_2 := \{q_5\}$. B_2 wird nicht getrennt, also $C_3 := B_2$.
- Wörter der Länge 2: aa, ab, ba, bb

  Keines dieser Wörter trennt C_1 oder C_2 oder C_3. Das Verfahren kann also abgebrochen werden.

Der Äquivalenzklassenautomat $\mathcal{A}^{\equiv} := (Q^{\equiv}, \Sigma, \delta^{\equiv}, s^{\equiv}, F^{\equiv})$ ist gegeben durch