Aufgaben zum Tut am 14.11.2006

Thomas Pajor

13. November 2006

Aufgabe 1.

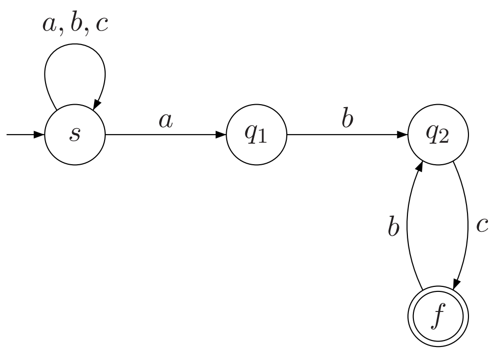
Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Konstruieren Sie einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$, der folgende Sprache akzeptiert:

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } a(bc)^k, k \geq 1\}$$

Der Automat muss nicht notwendigerweise deterministisch sein.

Lösung.

Der folgende Automat wäre eine Lösung:



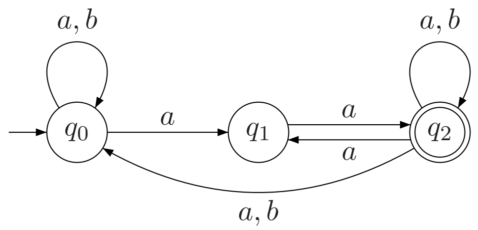
Beweisskizze. Sei $w \in L$. Dann hat w die Form $va(bc)^k$ für $k \geq 1$, wobei $v \in \Sigma^*$. Es existiert dann in $\mathcal{A}$ ein Abarbeitungspfad, so dass w akzeptiert wird, nämlich indem für alle Zeichen aus v der Übergang $s \to s$ genommen wird, und für den $a(bc)^k$ Teil von w die Übergänge

$s \to q_1 \to q_2 \to f$, wobei für $k \geq 2$ die Übergänge $f \to q_2 \to f$ beliebig oft wiederholt werden können. Da f ein Endzustand ist, wird das Wort von $\mathcal{A}$ akzeptiert.

Sei hingegen $w \in L(\mathcal{A})$, also w werde von $\mathcal{A}$ akzeptiert. w muss also durch einen gültigen Abarbeitungspfad in $\mathcal{A}$ in den Endzustand f gelangt sein. Dafür müssen aber zwangsweise die Übergänge $s \to q_1 \to q_2 \to f$ genommen worden sein, wobei die Übergänge $f \to q_2 \to f$ beliebig oft wiederholt werden konnten. Dies entspricht aber gerade dem Suffix $a(bc)^k$ für $k \geq 1$ in w. Somit ist also $w \in L$.

Aufgabe 2.

Gegeben sei folgender nichtdet. endl. Automat $\mathcal{A}$ über $\Sigma := \{a, b\}$



(a) Was ist die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{A})$?

(b) Geben Sie einen äquivalenten deterministischen Automaten $\tilde{\mathcal{A}}$ durch Potenzmengenkonstruktion an.

Lösung.

(a) Die akzeptierte Sprache ist

$$L := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens zwei aufeinanderfolgende } a\text{s}\}$$

(b) Wir führen eine Potenzmengenkonstruktion[1] durch. Sei also $\tilde{CA} := (\tilde{Q}, \Sigma, \{q_0\}, \tilde{F})$ der zu konstruierende deterministische Automat. Da $\tilde{Q} \subseteq 2^Q$, beginnen wir beim Startzustand $\{q_0\}$, und schauen welche Menge von Zuständen wir für jedes mögliche Zeichen $z \in \Sigma$ erreichen können. Diese Zustandsmenge ergibt dann den neuen Zielzustand für die Eingabe z. Wir fahren dann sukzessive fort indem wir für jede(n) neu gewonnen(e) Zustand(smenge) $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ schauen welche Zustände in $\mathcal{A}$ wir für jedes Zeichen aus z erreichen können. Wir brechen das Verfahren ab, sobald wir keine neuen Zustände $\tilde{q}$ mehr erhalten. Die Endzustände in $\tilde{\mathcal{A}}$ sind dann gerade die Mengen, die mindestens einen Endzustand von $\mathcal{A}$ enthalten.

Es ergibt sich folgende Tabelle:

[1] oder auch Teilmengenkonstruktion

$\tilde{Q} \downarrow \quad \Sigma \rightarrow$	a	b
$\tilde{q}_0 := \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\tilde{q}_1 := \{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
$\tilde{q}_2 := \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\tilde{q}_3 := \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$

Wir erhalten also einen deterministischen Automaten mit 4 Zuständen, wobei $F := \{\tilde{q}_2, \tilde{q}_3\}$. Der zugehörige Übergangsgraph wäre der folgende