# Aufgaben zum Tut am 31.10.2006

Thomas Pajor

31. Oktober 2006

## Aufgabe 1.

Seien $\Sigma := \{a, b, c, d\}$ und $L_1 := \{ab, b, abc, da\}$, $L_2 := \{b, dc, a\}$ Sprachen über $\Sigma$.

Bestimmen Sie $L_1 \cdot L_2$, $L_1 \setminus L_2$ und $((L_1 \cup L_2 \cup \{c, d\}^+)^*)^c$.

### Lösung.

Die Sprache $L_1 \cdot L_2$ besteht aus $4 \cdot 3 = 12$ Elementen, und zwar

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 = \{&abb, abdc, aba, \\ &bb, bdc, ba, \\ &abcb, abcdc, abca, \\ &dab, dadc, daa\} \end{aligned}$$

Sie ist die Kombination aller Wörter aus $L_1$ (grün) mit Wörtern aus $L_2$.

Die Sprache $L_1 \setminus L_2$ ist die klassische Mengendifferenz der Sprachen $L_1$ und $L_2$. Somit

$$L_1 \setminus L_2 = \{ab, b, abc, da\} \setminus \{b, dc, a\} = \{ab, abc, da\}$$

Die Sprache $((L_1 \cup L_2 \cup \{c, d\}^+)^*)^c$ betrachten wir etwas genauer. Nach Definition des positiven Abschlusses gilt $\{c, d\} \subset \{c, d\}^+$. Da $a \in L_2$ und $b \in L_1$ folgt $\{a, b, c, d\} \subset (L_1 \cup L_2 \cup \{c, d\}^+)$. Damit ist

$$\underbrace{\{a, b, c, d\}^*}_{=\Sigma^*} \subset \underbrace{(L_1 \cup L_2 \cup \{c, d\}^+)^*}_{=:L_3}$$

und damit $L_3 = \Sigma^*$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(L_3)^c &= \Sigma^* \setminus L_3 \\ &= \Sigma^* \setminus \Sigma^* \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

Die gesuchte Sprache ist also die leere Sprache.

## Aufgabe 2.

Seien $A, B$ zwei Sprachen über einem Alphabet $\Sigma$.

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$

(b) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

Gelten die beiden Aussagen für die Spezialfälle $A, B \subseteq \Sigma$ und $A \subseteq B$?

### Lösung.

(a) Die Aussage ist falsch. Wir zeigen dies durch ein Gegenbeispiel. Sei $A := \{a\}$ und $B := \{aa\}$. Offensichtlich ist

$$A \cap B = \emptyset$$

und damit folgt $(A \cup B)^* = \emptyset^* = \{\varepsilon\}$.
Es gilt jedoch

$$A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\} \quad \text{und} \quad B^* = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa, \ldots\}$$

Damit ist

$$A^* \cap B^* = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa, \ldots\} \neq \{\varepsilon\}$$

Für $A, B \subset \Sigma$ ist die Aussage wahr. Wir zeigen dies in zwei Schritten.

- Sei $w \in (A \cap B)^*$. Wegen $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$ ist

  $$(A \cap B)^* \subseteq A^* \quad \textbf{und} \quad (A \cap B)^* \subseteq B^*$$

  Somist ist $w \in A^*$ und $w \in B^*$, also auch $w \in A^* \cap B^*$.

- Sei $w \notin (A \cap B)^*$. Das heißt $w$ enthält ein Zeichen $z$, das weder in $A$ noch in $B$ liegt. Also $z \notin A$ und damit $w \notin A^*$ und schließlich $w \notin A^* \cap B^*$.

Für $A \subseteq B$ ist die Aussage ebenfalls richtig, denn hier gilt $A \cap B = A$ und damit $(A \cap B)^* = A^*$. Auf der anderen Seite folgt aus $A \subseteq B$ unmittelbar $A^* \subseteq B^*$, und damit $A^* \cap B^* = A^*$.

(b) Hier können wir recht schnell ein Gegenbeispiel angeben: Sei $L_1 := \{a\}$ und $L_2 := \{b\}$. Dann gilt

$$(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$$

Hingegen gilt jedoch

$$L_1^* \cup L_2^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\} \cup \{\varepsilon, b, bb, bbb, \ldots\} = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, bbb, \ldots\}$$

Offensichtlich sind die beiden Sprachen also nicht gleich, da $ab \in (L_1 \cup L_2)^*$ aber $ab \notin L_1^* \cup L_2^*$.

Für $A, B \subset \Sigma$ ist diese Aussage ebenfalls nicht wahr, denn wählen wir $\Sigma = \{a, b\}$, so können wir obiges Gegenbeispiel analog benutzen.

Für $A \subseteq B$ ist die Aussage wahr. Denn es folgt $A \cup B = B$ und somit $(A \cup B)^* = B^*$. Ebenso folgt $A^* \subseteq B^*$ und damit $A^* \cup B^* = B^*$.

## Aufgabe 3.

Sei $M$ eine Menge. Eine (zweistellige) Relation $R$ über $M$ ist $R \subseteq M \times M$.

Sind $R$ und $S$ zwei Relationen über $M$, so ist das Produkt $R \star S$ der Relationen definiert durch

$$R \star S := \{(x, y) \mid \exists z \in M : (x, z) \in R \text{ und } (z, y) \in S\}$$

Zeigen Sie:

(a) $\star$ ist assoziativ: $(R \star S) \star T = R \star (S \star T)$

(b) $\emptyset$ ist „Nullelement“: $\emptyset \star S = \emptyset = S \star \emptyset$

(c) Die Gleichheitsrelation $G$ ist „Einselement“: $G \star S = S = S \star G$. Die Gleichheitsrelation ist definiert durch $G := \{(x, x) \mid x \in M\}$.

## Lösung.

(a) Seien $R, S$ und $T$ drei Relationen über $M$. Betrachte ein Tupel $t = (x, y)$ mit $t \in (R \star S) \star T$. Es gibt also ein $z \in M$ mit $(x, z) \in (R \star S)$ und $(z, y) \in T$. Wegen $(x, z) \in R \star S$ gibt es nun ein $z' \in M$ so dass $(x, z') \in R$ und $(z', z) \in S$. Insgesamt haben wir:

$$(x, z') \in R \quad (z', z) \in S \quad (z, y) \in T$$

Also haben wir $z$, so dass gilt $(z', z) \in S$ und $(z, y) \in T$ woraus $(z', y) \in (S \star T)$ folgt. Mit $z'$ erhalten wir $(x, z') \in R$ und $(z', y) \in (R \star T)$ wiederrum nach Definition $(x, y) \in R \star (S \star T)$. Wir haben also $(R \star S) \star T) \subseteq R \star (S \star T)$ bewiesen.

Die Rückrichtung geht analog. $\square$

(b) Wir erhalten die Aussage durch Nachrechnen:

$$R \star \emptyset = \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in M, (z, y) \in \emptyset\}$$

Da kein $(z, y) \in \emptyset$ existiert, wird die Bedingung, unter der die Menge konstruiert wird, nicht erfüllt, und sie enthält somit keine Elemente. Es folgt $R \star \emptyset = \emptyset$.

$\emptyset \star R = \emptyset$ analog. $\square$

(c) Ebenfalls nachrechnen liefert:

$$\begin{aligned} R \star G &= \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in R, (z, y) \in G\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in R, (y, y) \in G\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, y) \in R\} \\ &= R \end{aligned}$$

$G \star R$ analog. $\square$