# Der Minus-Eins Zeilen Trick

Thomas Pajor

1. Juni 2005

**Zusammenfassung**

Das Lösen von homogenen linearen Gleichungssystemen (LGS) ist in der linearen Algebra von zentraler Bedeutung. Als Standardverfahren wird dabei die Gauß-Elimination verwendet, bei der man das LGS als Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ auffast und dann diese durch elementare Zeilenumformungen in Gaußnormalform (GNF) bringt.

Hat man als Endprodukt die GNF hergeleitet, und gilt $\operatorname{Rang} A < n$, so hat man nun das Problem den Lösungsraum irgendwie abzulesen. Dieses Dokument soll dazu einen höchst geheimen Trick vorstellen, und zwar den sogenannten „Minus-Eins Zeilen-Trick“, mit dem das Ablesen der Lösung in einem Bruchteil einer Sekunde möglich ist.

## Der Trick

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix zu einem homogenen LGS $Ax = 0$ ($x \in \mathbb{K}^n$). Durch Anwenden des Gauß Algorithmus lässt sich die Matrix $A$ in die Gaußnormalform überführen.

**Definition.** *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Eine Matrix $A' \in \mathbb{K}^{k \times n}$ mit $k \leq m$ ist in* Gaußnormalform *wenn sie folgende Gestalt hat*

$$A' = \left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \ldots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & *
\end{array}\right)$$

*Dabei geht $A'$ durch elementare Zeilenumformungen aus $A$ hervor. Treten ggf. Nullzeilen auf, so werden diese gestrichen.*

Wir konstruieren nun eine Matrix $A'' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ aus $A'$ wie folgt:

Füge $n - k$ Zeilen $a''_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (wobei die $-1$ an der $i$-ten Stelle steht) derart in die Matrix $A'$ ein, dass für alle Diagonalelemente $a''_{ii}$ gilt $a''_{ii} \in \{-1, 1\}$.

Also definieren wir:

**Definition.** *Die Matrix $A'' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat nach Konstruktion die Form*

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & 0 & & & & & 0 & & & \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & & & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & & & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & -1 & 0 & & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 1 & & & \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*Wir nennen diese Matrix die* Minus-Eins-Zeilen Matrix *zur GNF $A'$.*

*In den Spalten $1 \leq j_1 < \ldots < j_k < n$ stehen dabei gerade die Einheitsvektoren $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$.*

Kommen wir nun zum zentralen Satz für den Minus-Eins Zeilen Trick:

**Satz.** *Sei $Ax = 0$ eine lineares homogenes LGS mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $A' \in \mathbb{K}^{k \times n}$ mit $k \leq n$ die Gaußnormalform zu $A$. Weiterhin sei $A'' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die zugehörige Minus-Eins Zeilen Matrix.*

*Seien außerdem $j_1, \ldots, j_k$ die Indizes der Spalten von $A''$, in denen gerade die Einheitsvektoren stehen.*

*Dann gilt:*

*(i) Die Spalten $a''_j$ für $j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$ sind linear unabhängig.*

*(ii) Die Spalten $a''_j$ für $j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$ sind im Lösungsraum $L$ des LGS $Ax = 0$.*

*(iii)* $\dim L = n - k$.

**Beweis.**

(i) Die Matrix $A''$ ist nach Konstruktion eine obere Dreiecksmatrix für deren Diagonalelemente $a''_{ii} \in \{-1, 1\}$ mit $i = 1, \ldots, n$ gilt.
$\Rightarrow \det A'' \neq 0$

$\Rightarrow A''$ regulär

$\Rightarrow \mathrm{Rang}\, A'' = n$

$\Rightarrow$ Die Spalten $a''_j$ $(j = 1, \dots, n)$ sind linear unabhängig.

(ii) Es ist klar, dass falls eine solche Spalte $a''_j$ im Lösungsraumraum von $L$ liegt, gelten muss, dass

$$Aa''_j = 0$$

Da die Matrix $A'$ die GNF zu $A$ ist, besitzt sie den gleichen Lösungsraum. Es gilt also

$$Aa''_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A'a''_j = 0$$

Wir betrachten jetzt den Vektor

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A'a''_j$$

und zeigen dass alle Komponenten $y_i$ des Vektors Null ergeben.

Nach dem Gesetz der Matrix-Vektor-Multiplikation gilt für $y_i$

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{n} a'_{i\nu} \cdot a''_{\nu j}$$

Nun haben wir die Matrix $A''$ ja gerade so konstruiert, dass die $i$-te Zeile von $A'$ die $j_i$-te Zeile von $A''$ ist (Durch das geschickte Einfügen der $-1$-Zeilen). Es gilt also

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{n} a''_{i\nu} \cdot a''_{\nu j}$$

Betrachten wir nun $\nu$ genauer. Offenbar gilt für $\nu = j_i$, dass wir uns gerade auf einem Diagonalelement befinden, und zwar auf einem (wegen $j_i$), das gerade 1 ist, also ist in dem Fall $a_{j_i\nu} = 1$. Da in der GNF ober- und unterhalb der Treppenstufen nur Nullen stehen, können wir außerdem sagen, dass $a''_{j_i\nu} = 0$ ist, wenn $\nu \in \{j_1, \dots, j_k\} \setminus \{j_i\}$. Nochmal zusammengefasst gilt also:

$$a''_{j_i\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \nu \neq j_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für} \qquad \nu \in \{j_1, \dots, j_k\}$$

Was ist jedoch mit den restlichen Werten die $\nu$ annimmst? Also sei nun $\nu \notin \{j_1, \dots, j_k\}$. Hierzu betrachten wir den zweiten Faktor in der Summe. Nach Konstruktion der Matrix

$A''$ hat die $\nu$-te Zeile in $A''$ die Form $a''_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (mit der $-1$ natürlich an der $\nu$-ten Stelle), und zwar gerade wenn $\nu \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$! Das bedeutet dass gilt:

$$a''_{\nu j} = \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad \nu \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für} \qquad \nu \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$$

Damit lässt sich nun unsere Summe etwas genauer formulieren:

$$\begin{aligned} y_i &= \sum_{\nu=1}^{n} a''_{i\nu} \cdot a''_{\nu j} \\ &= a''_{j_i j_i} a''_{j_i j} + a''_{j_i j} a''_{jj} + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \notin \{j_i, j\}}}^{n} a''_{j_i \nu} \cdot a''_{\nu j} \\ &= 1 \cdot a''_{j_i j} + a''_{j_i j} \cdot (-1) + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Wegen $\operatorname{Rang} A' = k$ gilt nach dem Dimensionssatz

$$n = \dim L + \operatorname{Rang} A$$

also

$$\dim L = n - \operatorname{Rang} A = n - k$$

Geschafft! :-) □

Wir folgern mit Hilfe der drei Aussagen des Satzes schließlich die Kernaussage des Tricks:

**Korollar.** *Die Spalten $a''_j$ der Minus-Eins Zeilen Matrix $A''$ mit $j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}$ bilden eine Basis des Lösungsraums $L$ des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.*

**Beweis.** Nach Konstruktion von $A''$ haben wir gerade $n - k$ Minus-Eins Zeilen eingefügt. Es gibt also gerade $n - k$ solche Spalten $a''_j$. Mit dem obigen Satz folgt die Behauptung. □

## Ein Beispiel

Die Matrix ist im LA Skript [1] auf Seite 111 zu finden.

Wir haben eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ und möchten das zugehörige homogene LGS $Ax = 0$ lösen. $A$ sei wie folgt definiert

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 8 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Umformen zur Gaußnormalform liefert uns die Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt müssen wir die Matrix $A'$ in die Matrix Minus-Eins Zeilen Matrix $A''$ überführen, und zwar fügen wir dazu nach der zweiten Zeile eine neue Minus-Eins Zeile ein, und fügen eine Weitere ans Ende an. Dadurch wandern die ganzen Einsen auf die Diagonale.

$$A'' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

Der Lösungsraum des LGS $Ax = 0$ lässt sich nun nach dem oberen Satz ablesen. Die Basisvektoren sind nämlich gerade die Spalten in der Matrix in denen wir eine $-1$ auf der Diagonalen haben. Also:

$$L = [\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

## Warnungen

Dieser Trick funktioniert *nur*, wenn man die Gaußnormalform hergeleitet hat. Wichtig ist, dass über den Einsen in der GNF überall Nullen stehen! Andernfalls würde ja auch der Beweis versagen.

Ist das LGS nur trivial lösbar (bzw. gilt $\operatorname{Rang} A = n$), so scheitert natürlich der Minus-Eins Zeilen Trick. Man sollte also nicht glauben dass der Lösungsraum dann leer ist. Er enthält nämlich immernoch den Nullvektor, denn dieser ist immer eine Lösung.

# Literatur

[1] DR. V. DRUMM, PROF. DR. W. WEIL, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, 2004