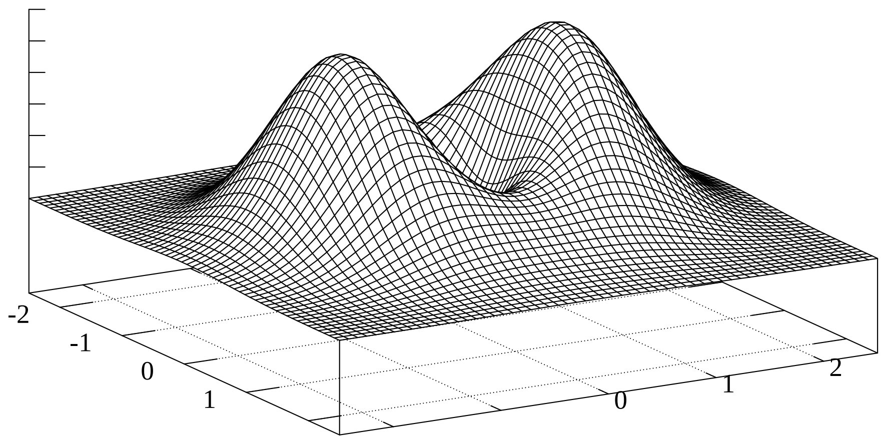
HM Schemata für Informatiker

Von Thomas Pajor



Eine Zusammenfassung einiger Schemata für die HM Klausur.

Vorwort

Dies ist eine Zusamenfassung einiger Aufgabentypen und deren Lösungswege als Schema für die Vorbereitung zur Klausur „Höhere Mathematik für Informatiker“ aus dem Jahr 2004 an der *Universität Karlsruhe (TH)*. Ich habe bei der Erstellung der Schemata darauf geachtet, dass sie vorallem leicht zu verstehen sind, daher ist es möglich dass die eine oder andere Definition nicht 100% exakt oder vollständig ist.

Für die Richtigkeit des Inhalts bzw. der dargelegten Schemata übernehme ich keinerlei Haftung! Des Weiteren sei angemerkt, dass hier nur Ausschnitte aus dem Stoff für die Klausur enthalten sind. Dieses Dokument soll keine Basis zum Lernen darstellen, sondern lediglich eine hilfreiche Ergänzung sein. Übrigens: Man sollte den Stoff vorher verstanden haben, und nicht nur die Schemata auswendig lernen, da man sonst Probleme hat, wenn in der Klausur leicht abgewandelte Aufgabentypen drankommen!

Der Schwerpunkt der Schemata liegt eindeutig auf HM II. Das liegt zum einen daran, dass ich nicht so viel Zeit hatte auch noch alle Aufgabentypen aus der HM I zu integrieren, und zum anderen daran, dass die HM I vom Stoff her größtenteils der gymnasialen Oberstufe entspricht. Die etwas schwierigeren Themen wie Partialbruchzerlegung habe ich dennoch mit reingenommen.

Wenn sich Fehler finden, so teilt mir diese doch bitte via eMail mit (thomas.pajor@logn.de). Die aktuellste Version des Skripts findet sich immer auf www.logn.de

Viel Spass beim Lernen und viel Erfolg in der Klausur!

Inhaltsverzeichnis

1 HM I

1.1 Mittelwertsatz

Gegeben: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Abschätzung $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$.
Gesucht: Der Beweis für die Abschätzung.

Der Mittelwertsatz sagt, dass es immer ein $f'(\xi)$ gibt, für das gilt:

$$f'(\xi) = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Dies entspricht der gegebenen Form, wobei $c = f'(\xi)$. Leite also die gegebene Funktion $f(x)$ einmal ab. Bestimme nun, je nach Richtung des Ungleichheitszeichens, das globale Maximum bzw Minimum der Funktion $f'(x)$. In der Regel ist dies leicht ablesbar, und sollte dem c entsprechen.

Schreibe schlussendlich noch „Laut Mittelwertsatz gilt also die gegebene Abschätzung“.

1.2 Partialbruchzerlegung (PBZ)

Gegeben: Ein Bruch $\frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynome, wobei $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(q)$.
Gesucht: Partialbruchzerlegung von $\frac{p(x)}{q(x)}$.

(i) Nullstellen im Nenner

Schreibe $q(x)$ als Faktorzerlegung (z.b. $\frac{5}{x^2+3x-10} \hookrightarrow \frac{5}{(x-2)(x+5)}$) durch Polynomdivision). Es gebe nun n Nullstellen λ_k mit ihrer jeweiligen Vielfachheit ν_k.

(ii) Ansatz

Bei der Partialbruchzerlegung wird nun jede Nullstelle im Nenner als eigener Bruch angenommen, wobei der Zähler eine jeweils verschiedene Unbekannte ist. Die einzelnen Brüche werden dann aufsummiert. Für das Beispiel oben ergäbe sich folgende Gleichung:

$$\frac{5}{(x-2)(x+5)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$$

Hat die Nullstelle eine Vielfachheit $\nu_k > 1$, so wird für jedes $\chi_{k,l} \in [1..\nu_k]$ jeweils ein Bruch addiert mit der Potenz $\chi_{k,l}$ im Nenner. Beispiel:

$$\frac{5}{(x-2)^2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

Ist eine Nullstelle nicht reell (wie zum Beispiel $x^2 + 1$), so wird diese Nullstelle hinten angehängt mit der Besonderheit, dass im Zähler nicht bloß eine Konstante vorkommt sondern ein allgemeines Polynom 1. Grades:

$$\frac{5}{x^2+1} \stackrel{!}{=} \frac{Ax+B}{x^2+1}$$

Der allgemeine, formale Ansatz kann in [1, Inoffizielles Skriptum zur Vorlesung] nachgelesen werden, er ist jedoch nicht leicht durchschaubar, deshalb sei der Ansatz hier anhand von Beispielen erklärt. Beachte jedoch, dass obige Vorkommen auch kombiniert auftreten können, Beispiel:

$$\frac{x+2}{x^2(x-1)(x^2+1)} \stackrel{!}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{x^2+1}$$

(iii) Gleichung lösen

Als erstes werden die Brüche eliminiert, in dem man die Gleichung mit allen Nenner multipliziert. Für das Lösen der Gleichung gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder man setzt die Nullstellen λ_k in die Gleichung ein, und schaut ob sich so Werte für die Unebannten ergeben. Wenn das nicht der Fall ist, hilft nurnoch ein Koeffizientenvergleich. Dazu bringt man die Gleichung in folgende Form (es seien jetzt mal die Variablen A, B, C in der Zerlegung angenommen):

$$x^0 \cdot (\alpha_0 A + \beta_0 B + \gamma_0 C) + x^1 \cdot (\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C) + \cdots + x^n \cdot (\alpha_n A + \beta_n B + \gamma_n C) = 0$$

Die griechischen Buchstaben sind konstanten Koeffizienten die sich durch das Umformen ergeben (keine Angst) ;) Nun kann man ein Gleichungssystem aufstellen, da man sagen kann, die Gleichung ist erfüllt, wenn *alle* Summanden 0 sind. Das LGS hat also die Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_0 A & \beta_0 B & \gamma_0 C & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_n A & \beta_n B & \gamma_n C & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungen für A, B, C dieses LGS setzt man dann in den Ansatz ein, und erhält so eine Partialbruchzerlegung des ursprünglichen Bruchs $\frac{p(x)}{q(x)}$.

2 HM II

2.1 Untersuchung von Mengen

Gegeben: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n \quad (n > 0$; insb. $M \neq 0 \wedge M \neq \mathbb{R}^n)$

(i) Untersuche auf Beschränktheit

Es muss erfüllt sein:

$$\forall x \in M : \ \|x\| \leq \varepsilon$$

Kann man die Menge nach oben durch ein ε abschätzen $\Rightarrow$ beschränkt, sonst unbeschränkt.

(ii) Menge abgeschlossen?

„Menge muss überall durch eine Kante begrenzt sein.“
Schreibe: „Es sei $a^{(k)} := (a_1^{(k)}, ..., a_n^{(k)})$ Folge in M mit $a^{(k)} \overset{k\to\infty}{\to} (a_1, ..., a_n)$.“ Ist dieser Grenzwert stets in der Menge enthalten (Einsetzen!!!) $\Rightarrow$ Abgeschlossenheit $\Rightarrow$ insb. keine Offenheit! (iii)-(iv) braucht nicht mehr untersucht werden.

(iii) Menge <u>nicht</u> abgeschlossen?

Suche <u>eine</u> spezifische Folge $a^{(k)} := (a_1^{(k)}, ..., a_n^{(k)}) \in M \to a \notin M$
Beispiel: $A := \{x : \ x < 5\}$; Folge $a_k = 5 - \frac{1}{k}$ ist immer in A, aber $5 - \frac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\to} 5 \notin A \Rightarrow A$ nicht abgeschlossen!

(iv) Menge <u>nicht</u> offen?

Finde Punkt $p \in M$ „auf einer Kante“ für den gilt, dass $p + \varepsilon \notin M$ (für bel. kl. $\varepsilon > 0$).
Beispiel: $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 5\}$; Es sei $p = (0, \sqrt{5}) \in A$, aber $(0, \sqrt{5}) + (0, \varepsilon) = (0, \sqrt{5} + \varepsilon) \notin A \Rightarrow A$ nicht offen.

(v) Kompaktheit

Ist die Menge **abgeschlossen und beschränkt** $\Longrightarrow$ Kompaktheit!

Tricks:

- $<$ und $>$ in der Mengendefinition deuten auf Offenheit hin.
- $\leq$ und $\geq$ in der Mengendefinition deuten auf Abgeschlossenheit hin.

2.2 Grenzwerte Bestimmen

Gegeben: $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to R$
Gesucht: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

(i) Vermutung: GW existiert nicht

Suche zwei verschiedene Folgen $a^{(k)}, b^{(k)}$ die in f liegen und beide für $k \to \infty$ gegen x_0 konvergieren. Berechne:

$$\lim_{k\to\infty} f(a^{(k)}) \;=\; a \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} f(b^{(k)}) \;=\; b$$

Sind diese beiden Grenzwerte verschieden ($a \neq b$), oder existiert einer der GWe nicht, so existiert der gesuchte Grenzwert auch nicht! **Achtung:** Die Umkehrung („$a = b \Rightarrow$ GW existiert“ ist i.d.R. falsch!!!)
Bildliche Vorstellung: Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so kann man sich den Graph als „Landschaft im Raum“ vorstellen. Nähert man sich nun einem Punkt x_0 in der Landschaft aus verschiedenen Richtungen (verscheidene Folgen!), und sind die Grenzwerte der Funktion für die Folgen verschieden, so kann dieser Grenzwert in der Landschaft nicht existieren.

(ii) Vermutung: GW existiert

Wende eines der folgenden Verfahren an:

(1) Polarkoordinaten Methode:

Geschickt anzuwenden wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x_0 = (0, 0)$ und wenn f Ausdrücke der Form $x^2 + y^2$ enthält!
Schreibe: „Sei $a^{(k)} := (x_k, y_k)$ Folge in Polarkoordinaten-Form, also $a^{(k)} = (r_k \cdot \cos(\varphi_k), r_k \cdot \sin(\varphi_k))$“.
Setze $a^{(k)}$ in f ein und lass r gegen 0 laufen!

(2) Maximum Methode:

Es sei wieder $a^{(k)} := (a_1^{(k)}, ..., a_n^{(k)})$ Folge in f mit $a^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Definiere nun m_k als *Maximum* über den Betrag aus allen Komponenten der Folge, also: $m_k := \max\{|a_1^{(k)}|, ..., |a_n^{(k)}|\}$. Da nun gilt: $f(a^{(k)}) \leq f(m_k)$ ($f(m_k)$ bedeutet m_k eingesetzt für $(x_1, ...x_n)$, lässt sich der Term nach oben abschätzen. Ist nun $\lim\limits_{k\to\infty} f(m_k) = 0$, kann man sagen dass auch *jede* Folge, die kleiner ist (somit also auch $f(a^{(k)})$) gegen 0 geht! Ist der GW von $f(m_k) > 0$, ist keine Aussage über den GW von $f(a^{(k)}$ möglich!

(3) Bekannte Grenzwerte aus $\mathbb{R}^1$

Versuche f durch geschicktes Umformen in die Form eines bekannten Grenzwerts zu bringen.
Beispiel: $\frac{\sin(t)}{t} = 1 \quad (t \to 0)$. Also konvergiert auch $\frac{\sin(xyz)}{xzy}$ gegen 1 (für $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$).

(4) Sonstige Verfahren

Wenn keines der obigen Verfahren hilft, hilt möglicherweise eine Umformung des Terms, so dass sich Dinge kürzen (o.ä.). Evtl hilft eine Abschätzung nach oben (Stichwort: *CSU*) mit einem GW von 0.
Achtung: Wenn man in irgend einer Weise nach oben abschätzt und für die Abschätzung einen GW > 0 herausbekommt, ist <u>keine</u> Aussage über den eigentlichen GW möglich!

2.3 Stetigkeit

Gegeben: $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to R$
Gesucht: f stetig in x_0?

Zeige, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =: a$ existiert, und dass $f(x_0) = a$.
Ist dies erfüllt $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0, sonst nicht.

2.4 Ableiten

Gegeben: $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$
Gesucht: $(\operatorname{grad} f)$

(i) Prüfen auf Stetigkeit

Zeige, dass f auf D stetig ist. Ist f eine zusammengesetzte Funktion, oder enthält f „problematische“ Stellen x_0, muss $(\operatorname{grad} f)(x_0)$ zusätzlich über Punkt (iv) bestimmt werden.

(ii) Alle partielle Ableitungen bestimmen

Die partielle Ableitung nach einer Variablen x_k bestimmt man dadurch, dass man alle anderen Variablen von f für den Moment als <u>konstant</u> betrachtet, und nur nach x_k ableitet. Schreibweise: $f_{x_k}(x) = \ldots$. Dies führt man nun für alle Variablen durch!

(iii) Partielle Ableitungen zusammenfassen

Fasse alle partiellen Ableitungen zu einer $n \times m$ (*Jakobi*-)Matrix zusammen. Ist $f : D \to \mathbb{R}^1$ erhält man eine $n \times 1$ Matrix, also einen Vektor. Beispiele:

$$f(x,y) = 5x^2y + xy \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{grad} f)(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(10xy + y, 5x^2 + x\right)$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x^2y + xy \\ \sin(x) \cdot y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{grad} f)(x,y) = \begin{pmatrix} f_{1_x}(x,y) & f_{1_y}(x,y) \\ f_{2_x}(x,y) & f_{2_y}(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10xy + y & 5x^2 + x \\ \cos(x) \cdot y^2 & \sin(x) \cdot 2y \end{pmatrix}$$

(iv) Spezielle Prüfung der Diffbarkeit in einem Punkt x_0

Einsetzen in die Gleichung aus der Definition der partiellen Differenzierbarkeit (e_k ist dabei der k-te Einheitsvektor):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_k) - f(x_0)}{h} =: f_{x_k}(x_0)$$

liefert die partiele Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in x_0.

Tricks:

- Ist f zweimal stetig differenzierbar ($f \in C^2(D, \mathbb{R})$), so sagt der *Satz von Schwarz*:

  $$f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$$

  Das heißt, es ist egal ob man erst nach x_j und dann nach x_i ableitet, oder andersherum. Man kann sich also das Berechnen einer Ableitung sparen.
- Die Verallgemeinerung des obigen Satzes besagt, dass es bei einer m-mal stetig differenzierbare Funktion f für die Ableitungen der Ordnung $\leq m$ ebenfalls nicht auf die Reihenfolge der Differentiationen ankommt.

2.5 Richtungsableitungen

Gegeben: $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$
Gesucht: Alle Richtungsableitungen a in einem Punkt x_0

(i) Einsetzen in die Definition

Die Definition der Richtungsableitung lautet:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial a}$$

Wende diese Gleichung auf die Funktion f an und bestimme den Grenzwert.

(ii) Gradient bestimmen

Bestimme $(\operatorname{grad} f)(x_0)$.

(iii) Satz aus der VL anwenden

Mit

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x_0) = a \cdot (\operatorname{grad} f)(x_0)$$

lassen sich die beiden Ergebnisse aus den vorangegangenen Schritten gleichsetzen. Bestimme nun alle Lösungen dieser Gleichung durch Umformen und scharfes „Hinsehen“.

Tricks:

- Die Richtung a hat immer eine Länge von 1. Es gilt also: $a_1^2 + ... + a_n^2 = 1$. Dadurch fallen evtl bestimmte Teile im Term weg.
- Bei (ii) kann man das Ergebnis aus (i) benutzen, da man die Richtungsableitung „allgemein“ bestimmt hat. Die partiellen Ableitungen sind ja nichts anderes als die Richtungsableitungen entlang der „Axen“. Bei einer

Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wären die part. Ableitungen also f_x und f_y, und deren Richtungen $(1,0)$ und $(0,1)$. Diese Werte kann man einfach in das Ergebnis von (i) jeweils einsetzen!

- Existiert die Richtungsableitung nicht für alle a so ist f in x_0 auch nicht differentierbar.

2.6 Extremwerte

Gegeben: $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$
Gesucht: Alle Maxima und Minima von f.

(i) Zeige stetige Differentierbarkeit

Zeige, dass $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ist.

(ii) Gradient gleich Null setzen

Bestimme $(\operatorname{grad} f)(x)$. Suche nun alle Lösungen der Gleichung

$$(\operatorname{grad} f)(x) = 0$$

Lösung durch Gleichungssystem, Äquivalenzkette oder Umformungen und „Tricks“. Die einzelnen Lösungen sind bloß extremwert*verdächtige* Stellen.

(iii) Zweite Ableitungen

Bestimme alle zweiten Ableitungen von f.

(iv) Hesse Matrix

Erstelle nun eine Hessematrix. Diese enthält alle zweiten Ableitungen von f in folgender Form:

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \end{pmatrix}$$

Für eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ sähe die Hessematrix so aus:

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

(v) Bestimme Definitheit der Hessematrix

Setze nun jede verdächtige Stelle aus (ii) in die zweiten Ableitungen in der Hessematrix ein, und bestimme die Definitheit der Matritzen. Es ergeben sich für jeden Punkt folgende Möglichkeiten:

(1) $H_f(x_0)$ ist positiv definit $\Rightarrow$ $f(x_0)$ ist ein lokales Minimum.

(2) $H_f(x_0)$ ist negativ definit $\Rightarrow$ $f(x_0)$ ist ein lokales Maximum.

(3) $H_f(x_0)$ ist indefinit $\Rightarrow$ $f(x_0)$ ist kein lokales Extremum (evtl Sattelpunkt).

2.7 Implizit definierte Funktionen

Gegeben: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Umgebung $U(x_0)$, mit $g(x_0) = y_0$ und $f(x_0, g(x_0)) = c$
Gesucht: Beweis über die Existenz der Umgebung U und die Ableitung der implizit definierten Funktion $g'(x_0)$.

(i) Voraussetzungen prüfen

Folgende Voraussetzungen müssen geprüft werden:

(1) $f(x)$ muss stetig differenzierbar sein.

(2) $f(x_0, g(x_0)) = c$ muss explizit überprüft werden (Einsetzen).

(3) Es muss gelten $\det(f_y(x_0, g(x_0))) \neq 0$.

(ii) Satz anwenden

Sind die obigen Voraussetzungen erfüllt, kann man den Satz aus der Vorlesung anwenden um $g'(x_0)$ zu berechnen. Wende dazu folgende Formel an. Für die Formel muss man noch $f_x(x_0, g(x_0))$ berechnen!

$$g'(x_0) = -(f_y(x_0, g(x_0)))^{-1} \cdot f_x(x_0, g(x_0))$$

oder anders geschrieben

$$g'(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, g(x_0))$$

Fertig!

Tricks:

- Bei einer 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lässt sich die inverse Matrix sehr leicht berechnen: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Da man die Determinante schon für die 3. Bedingung berechnet hat, geht das sehr schnell.

2.8 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen

Gegeben: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$) und eine Menge über die Nebenbedingungen $T := \{x \in D : h(x) = 0\}$
Gesucht: Alle Extrema unter den Nebenbedingungen h.

(i) Untersuchung der Menge

Untersuche die Menge T auf Kompaktheit.

(ii) Funktion $h(x)$ aufstellen

Die Nebenbedingungsfunktion $h(x)$ ist eine Funktion $D \to \mathbb{R}^p$ wobei p die Anzahl der Nebenbedingungen ist. Diese muss man vorher auf alle Fälle noch so umformen dass die rechte Seite 0 ist. Beispiel:

$$D = \mathbb{R}^2 \text{ und } T = \{x \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0;\ x^2 + y^2 = 1\} \quad \Rightarrow \quad h(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $h(x)$ Ableiten

Bilde nun $(\operatorname{grad})h(x)$.

Extremwertverdächtige Stellen sind solche mit $\operatorname{rg} h'(x) < p$. Existieren solche nicht, ist also $\operatorname{rg} h'(x_0) = p \quad \forall x_0 \in D$, wende die Multiplikatorenregel von Lagrange an.

(iv) Multiplikatorenregel von Lagrange

Bilde eine Funktion $H(x)$ nach folgendem Aufbau:

$$H(x) := f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) + \ldots + \lambda_p h_p(x)$$

Leite nun $H(x)$ nach $x_1, \ldots, x_n$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ab, also bilde $(\operatorname{grad} H)(x)$. Setze $(\operatorname{grad} H)(x) = 0$, dies ergibt ein *nicht*lineares Gleichungssystem mit $m = n + p$ Gleichungen (m ist die Dimension der Definitionsmenge von $f(x)$ und p ist die Anzahl der Nebenbedingungen).

Alle Ergebnisse $x_0 = (x_1, \ldots, x_n)$ des Gleichungssystems sind Extremwertverdächtigen Stellen auf $f(x_0)$.

(v) Bestimmen der Art der Extrema

Um nun herauszufinden ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt, muss man seinen gesunden Menschenverstand benutzen...

2.9 Integration über allgemeine Mengen

Gegeben: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$) und eine Menge M.

Gesucht: $\int\limits_M f(x)\ dx$

Wähle eine der folgenden Methoden:

(i) Direkte Methode

Lässt sich die Menge in verschiedene Intervalle Zerlegen, so wählt man einfach diese Intervalle als Integrationsgrenze und integriert nacheinander. Beispiel:

$$f : D \to \mathbb{R}^2 \qquad M := M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x \leq 2;\ 2 \leq y \leq 4\}$$

$$\Rightarrow \text{Mit } x \in [1,2] \text{ und } y \in [2,4] \quad |M| = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_2^4 f(x)\ dy \right)\ dx$$

Die Integrationsreihenfolge ist beliebig. Man kann für die Integrationsgrenzen auch Funktionen verwenden, z.B.:

$$f : D \to \mathbb{R}^2 \qquad M := M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x \leq 2;\ 2 \leq y \leq 5x+3\}$$

$$\Rightarrow \text{Mit } x \in [1,2] \text{ und } y \in [2,5x-3] \quad |M| = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_2^{5x-3} f(x)\ dy \right)\ dx$$

(ii) Prinzip von Cavalieri

Sieht man der Menge an, dass sich eine Variable z in einem festen Intervall $z \in [a,b]$ bewegt, so kann man diese Variable für den Moment als konstant auffassen, und eine Menge

$$Q(z) := \{x \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in M\}$$

definieren. Diese integriert man dann mit obiger Methode, oder man wendet das Prinzip von Cavalieri nochmals an. Das Ergebnis $|Q|$ integriert man dann noch nach der festen Variablen z

$$|M| = \int\limits_a^b |Q(z)|\ dz$$

und erhält damit das gewünschte Ergebnis.

(iii) Polarkoordinaten

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}^2$, bieten sich evtl Polarkoordinaten an, besonders wenn die Menge Ausdrücke der Form $x^2 + y^2$ enthält. Dabei gilt

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \sin\varphi$$

Ersetze also x, y in der Menge M und transformiere das Integral:

$$\int\limits_M f(x,y)\ d(x,y) \quad = \quad \int\limits_M f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\ d(r,\varphi)$$

Dabei läuft φ im Intervall $[0, 2\pi]$.

(iv) Zylinderkoordinaten

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}^3$, so kommt man mit Polarkoordinaten nicht weiter, da diese ja nur Substitutionen für x und y liefern. Kommen außerdem Ausdrücke wie $x^2 + y^2$ in der Funktion bzw der Menge vor, so empfiehlt es sich Zylinderkoordinaten zu verwenden:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad y = r \cdot \sin\varphi \qquad z = z$$

Ersetze x, y, z also überall in der Menge M. Für das Integral ergibt sich:

$$\int\limits_M f(x,y,z)\; d(x,y,z) \quad = \quad \int\limits_M f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\; d(r,\varphi,z)$$

φ läuft dabei <u>immer</u> im Intervall $[0, 2\pi]$, ist also von 0 bis 2π zu integrieren.

(v) Kugelkoordinaten

Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}^3$, kann man auch Kugelkoordinaten verwenden. Diese bieten sich besonders bei Ausdrücken wie $x^2 + y^2 + z^2$ an. Dabei gilt

$$x = r \cdot \cos\varphi\cos\vartheta \qquad y = r \cdot \sin\varphi\cos\vartheta \qquad z = r \cdot \sin\vartheta$$

Ersetze also x, y, z in der Mengendefinition, und transformiere das Integral

$$\int\limits_M f(x,y,z)\; d(x,y,z) \quad = \quad \int\limits_M f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \cdot r^2\cos\vartheta\; d(r,\varphi,\vartheta)$$

Dabei läuft φ immer im Intervall $[0, 2\pi]$ und ϑ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2.10 Differentialgleichungen (DGL) Erster Ordnung

Gegeben: Eine Differentialgleichung erster Ordnung (s.u.)
Gesucht: Allgemeine Lösung / Lösung mit Anfangswertproblem (AWP)

(i) DGL identifizieren

Bestimme von welchem Typ die Differentialgleichung ist:

$P(x,y)\;dx + Q(x,y)\;dy = 0$ bzw $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$	Exakte DGL
$y' = f(x)g(y)$	DGL mit getrennten Veränderlichen
$y' + a(x)y = r(x)$	Lineare DGL 1. Ordnung
$y' + f(x)y = r(x) \cdot y^\alpha \quad (\alpha \neq 0)$	Bernoulli DGL
$y' + f(x)y = r(x) + g(x) \cdot y^2$	Ricatti DGL

(ii) Exakte DGL

Prüfe ob die DGL wirklich exakt ist. Dazu muss folgende Gleichung erfüllt sein ($P, Q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$):

$$P_y = Q_x \text{ auf } \mathbb{R}$$

Ist die DGL nicht exakt, so bestimme den *integrierenden Faktor*, sonst überspringe diesen Abschnitt. Probiere:

$$f(x) := \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

Hängt $f(x)$ nur von x ab, so ist der integrierende Faktor $\mu(x, y) = e^{\int f(x)\,dx}$.
Hängt $f(x)$ immernoch von x und y ab, so probiere:

$$g(y) := \frac{Q_x - P_y}{P}$$

Hängt $g(y)$ nur von y ab, so ist der integrierende Faktor $\mu(x, y) = e^{\int g(y)\,dy}$. Multipliziere nun den int. Faktor an die DGL heran ($\mu(x, y)P(x, y)\,dx + \mu(x, y)Q(x, y)\,dy = 0$) und beginne mit der Untersuchung von vorne...

Ist die DGL exakt, fahre hier fort:
Bestimme die Stammfunktionen der DGL. Mit $F_x = P$ und $F_y = Q$ ergibt sich:

$$F_1 = \int P(x, y)\,dx \quad \text{und} \quad F_2 = \int Q(x, y)\,dy$$

Merge die beiden Stammfunktionen F_1 und F_2 zu einer Stammfunktion F zusammen. Die Lösung lautet:

$$F(x, y) = c$$

Ist noch ein AWP $y(x_0) = y_0$ gegeben, so setze in $F(x, y) = c$ x_0 und y_0 ein, und bestimme c.

(iii) DGL mit getrennten Veränderlichen

Löse die Gleichung

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + c \quad (g(y) \neq 0)$$

nach y auf. Ist ein AWP $y(x_0) = y_0$ gegeben, setze y_0 und x_0 in die Lösung ein, und berechne c.

(iv) Lineare DGL 1. Ordnung

Die Lösung einer linearen DGL

$$y' + \underbrace{a(x)}_{\text{homogener Teil}} y = \underbrace{r(x)}_{\text{inhomogener Teil}}$$

setzt sich zusammen aus der Lösung des homogenen Teils und der des inhomogenen Teils, also:

$$y = y_{ho} + y_{inho}$$

Berechne die Lösung von y_{ho} über eine der folgenden Möglichkeiten:

(1) Raten einer Lösung (wer's kann ;-))

(2) Anwenden der Formel: $y_{ho} = c \cdot \underbrace{e^{-\int a(x)\,dx}}_{=:A(x)}$

(3) Berechnung einer Lösung über „Trennung der Veränderlichen“ (s.o.)

Berechne die Lösung von y_{inho} über eine der folgenden Möglichkeiten:

(1) Raten einer Lösung

(2) Anwenden der Formel $y_{inho} = \underbrace{e^{-\int a(x)\,dx}}_{\overset{!}{=}A(x)} \cdot \int r(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$

(3) Variation der Konstanten (painful!). Nachzulesen in [2, Repetitorium der Höheren Mathematik, Seite 431]

Ein AWP $y(x_0) = y_0$ löst man durch Einsetzen von y_0 und x_0 in y, und bestimme so das c.

(v) Bernoulli DGL

Eine Benoulli DGL der Form

$$y' + f(x)y = r(x) \cdot y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

lässt sich mit $u = y^{1-\alpha}$ und $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ auf eine lineare DGL

$$u' + (1-\alpha)f(x)u = (1-\alpha)r(x)$$

zurückführen. Weiteren Lösungsweg siehe unter „Lineare DGL 1. Ordnung“.
Achtung: Das Rücksubstituieren am Schluss nicht vergessen!

(vi) Ricatti DGL

Eine Ricatti DGL der Form

$$y' + f(x)y = r(x) + g(x)y^2$$

lässt sich, unter der Voraussetzung, dass eine Lösung $v(x)$ bekannt ist mit folgendem Ansatz auf eine lineare DGL 1. Ordnung zurückführen:

$$y = v + \frac{1}{u}, \quad y' = v' - \frac{u'}{u^2}$$

$\Rightarrow u' + (2vg - f)u = -g$ ist lineare DGL

Weiterer Lösungsweg siehe „Lineare DGL 1. Ordnung“.

2.11 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

Gegeben: Ein lineares DGL System $y' = Ay + b(x)$
Gesucht: Lösung des DGL-Systems bzw eines AWP $y(x_0) = y_0$

(i) Lösung des homogenen Teils

Den homogenen Teil $y' = Ay$ löst man in folgenden Schritten:

(1) Bestimme das charakteristische Polynom der Matrix A: $p(\lambda) := det(A-\lambda I)$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

(2) Bestimme alle n verschiedenen Nullstellen $\lambda_k \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms $p(x)$. ν_k sei dabei die Vielfachheit der k-ten verschiedenen Nullstelle. Bei komplexen Nullstellen wie $\lambda_k = a \pm bi$ wird nur ein Ergebnis für die weitere Rechnung verwendet, z.b. $\lambda_k = a + bi$, die komplex konjugierte Lösung wird also unterschlagen.

(3) Berechne nun für jede Nullstelle λ_k folgendermaßen die Eigenvektoren $\psi_{k,\chi}$:

- Bilde für alle $\chi \in [1..\nu_k]$ einen Eigenvektor $\psi_{k,\chi} \in \operatorname{kern}((A - \lambda_k I)^\chi)$.
- **Wichtig:** Der Eigenvektor muss linear unabhängig zu den bereits gelösten Eigenvektoren für diese Nullstelle sein!!

Man erhält für jede Nullstelle mit Vielfachheit ν_k genau ν_k Eigenvektoren, die alle linear unabhängig zueinander sein müssen. Ist die Vielfachheit von λ_k einfach (also $\nu_k = 1$), so reduziert sich das Problem auf $\psi_k \in \operatorname{kern}(A - \lambda I)$.

(4) Man hat nun genau $\sum\limits_{k=1}^{k=n} \nu_k$ Eigenvektoren ψ_k.

(5) Setze folgende Gleichung für jede verschieden Nullstelle λ_k an:

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= e^{\lambda_k x} \cdot \left(\psi_{k,1} + x(A - \lambda_k I)\psi_{k,2} + \cdots + \frac{x^{\chi_k - 1}}{(\chi_k - 1)!}(A - \lambda_k I)^{\chi_k - 1}\psi_{k,\nu} \right) \\ &= e^{\lambda_k x} \sum_{\iota=0}^{\nu_k - 1} \frac{x^\iota}{\iota!}(A - \lambda_k I)^\iota \psi_k \end{aligned}$$

Für eine einfache Nullstelle ($\nu_k = 1$) vereinfacht sich die Formel auf:

$$y^{(k)}(x) = e^{\lambda_k x} \cdot \psi_k$$

Dies sind die Lösungen für das Fundamentalsystems. War λ_k eine komplexe Nullstelle, so muss man $y^{(k)}$ noch aufteilen in Real und Imaginäranteile, welche Lösungen für sich sind.

(6) Die allgemeine Lösung des homogenen Teils ist also:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \cdots + c_{n+m} y^{(n+m)} \\ &= \sum_{k_1}^{n+m} c_k y^{(k)} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(n+m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_p^{(1)} & \cdots & y_p^{(n+m)} \end{pmatrix}}_{=:Y(x)} \cdot c \\ &= Y(x) \cdot c \end{aligned}$$

wobei n die Anzahl aller verschiedenen Nullstellen ist, m die Anzahl komplexer verschiedener Nullstellen ist und p die Dimension der Matrix A ist ($p \times p$). $Y(x)$ heißt auch *Fundamentalmatrix*.

(ii) Spezielle Lösung des inhomogenen Teils

Mache den Ansatz über „Variantion der Konstanten“:

$$y_p(x) = Y(x) \cdot c(x) \quad (c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p)$$

Man bringt also c in Abhängigkeit von x. Dies bringt man in die Form

$$Y(x) \cdot c'(x) = b(x)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(n+m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_p^{(1)} & \cdots & y_p^{(n+m)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_p'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_p(x) \end{pmatrix}$$

Löse nun dieses Gleichungssystem. Man erhält hierbei die Funktionen $c_1'(x) \dots c_p'(x)$. Durch Integration jedes $c_k'(x)$ erhält man den Vektor $c(x)$, und kommt so auf die *spezielle* Lösung

$$y_p(x) = Y(x) \cdot c(x)$$

(iii) Allgemeine Lösung des inhomogenen DGL Systems

Die allgemeine Lösung ist nun einfach gegeben durch

$$y(x) = y_p(x) + Y(x) \cdot c \quad (c \in \mathbb{R}^p)$$

Fertig!

(iv) Anfangswertproblem

Ist zusätlich noch ein Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$ gegeben, so muss man y_0 und x_0 in $y(x)$ einsetzen, und die Konstante c durch Lösen eines Gleichungssystems bestimmen.

2.12 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben: Eine lineare DGL n'ter Ordnung: $y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + f_1y' + f_0y = b(x)$ mit ($f_0, \ldots, f_{n-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
Gesucht: Lösung der DGL / AWP

(i) Fundamentalsystem berechnen

Bestimme alle Eigenwerte der DGL indem man das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ bestimmt, und alle n *verschiedenen* Nullstellen λ_k mit ihrer Vielfachheit ν_k von $p(\lambda)$ sucht.
Jede Nullstelle liefert genau ν_k Beiträge zum Fundamentalsystem, nämlich:

$$x^{\chi-1} \cdot e^{\lambda_k x} \quad \text{wobei} \quad \chi \in [1..\nu_k]$$

Beispiel: Sei $\lambda_1 = 2$ mit $\nu_1 = 1$ und $\lambda_2 = -4$ mit $\nu_2 = 3$, so wäre das Fundamentalsystem $FS = \left(e^{2x}|e^{-4x}|xe^{-4x}|x^2e^{-4x}\right)$.

(ii) Inhomogenen Teil untersuchen

Mit

$$b(x) = q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot cos(\beta x)$$

wobei q(x) ein Polynom vom Grad k, α und $\beta \in \mathbb{R}$ sind, sucht man sich nun geeignete α und β, so dass diese Gleichung erfüllt ist.

Prüfe nun ob $p(\alpha + i\beta) = 0$ ist (p ist das charakteristische Polynom).

(iii) Spezielle Lösung bestimmen

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Teils erhält man durch den Ansatz

$$y_p(x) = \begin{cases} (\widehat{q}(x)\cos(\beta x) + \widetilde{q}(x)\sin(\beta x)) \cdot e^{\alpha x} & \text{falls } p(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ x^\nu (\widehat{q}(x)\cos(\beta x) + \widetilde{q}(x)\sin(\beta x)) \cdot e^{\alpha x} & \text{falls } \alpha + i\beta \text{ eine } \nu\text{-fache Nullstelle von } p \text{ ist.} \end{cases}$$

$\widehat{q}$ und $\widetilde{q}$ sind verschiedene, allgemeine Polynome vom Grad k. (Sei $k = 2$, so wäre $\widehat{q} = a_1 x + a_2$ und $\widetilde{q} = b_1 x + b_2$)

(iv) Ableiten

Leite nun $y_p(x)$ n-mal ab (n ist die Ordnung der DGL).

(v) Ableitungen einsetzen

Setze nun die jeweilgen Ableitungen in die Original DGL ein

$$y_p^{(n)} + f_{n-1} y_p^{(n-1)} + \ldots + f_1 y_p' + f_0 y_p \overset{!}{=} b(x)$$

Bestimme die Variablen $a_1, ..., a_k$ und $b_1, ..., b_k$. Setze die Variablen in $y_p(x)$ ein.

(vi) Allgemeine Lösung

Die allgemeine Lösung der DGL ist also

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) + \cdots + c_n y^{(n)}(x) + y_p(x)$$

$y^{(k)}$ sind dabei die Komponenten des Fundamentalsystems vom homogenen Teil.

Tricks:

- Das charakteristische Polynom lässt sich meistens extrem leicht ablesen, wenn man die Formel

  $$p(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0\right)$$

  benutzt.

2.13 Fourier Transformation

Gegeben: Eine stückweise stetige und absolut integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
Gesucht: Fouriertransformierte von f.

Benutze folgende Formel

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ist}\, dt$$

um die Fouriertransformierte $\widehat{f}(s)$ zu $f(t)$ zu bekommen.

Hinweis: Benutze *nicht* den Cauchyschen Hauptwert, sondern integriere in zwei Schritten:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ist}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} f(t) \cdot e^{-ist}\, dt + \int\limits_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-ist}\, dt \right]\end{aligned}$$

Tricks:

- Um die Integrale zu berechnen, bietet sich oft partielle Integration an.

2.14 Laplace Transformation

3 LA Exkurs

Dies ist eine ganz knappe, und vorallem *spezielle* Erklärung einiger Begriffe und Verfahren aus der Linearen Algebra, die man in der Höheren Mathematik benötigt. Wenn man LA erst nach HM hört, könnte das recht hilfreich sein.

3.1 Determinante

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix A.
Gesucht: $\det(A)$

(i) Allgemeines Verfahren

Allgemein bringt man die Matrix durch Gausselimination in Dreiecksform, das heißt alle Werte unterhalb der Diagonalen sind 0. Beispiel bei einer 3×3 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \overset{Gauss}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & a_{b,3} \\ 0 & 0 & b_{3,3} \end{pmatrix}$$

Wichtig: Bei den Verrechnungsschritten der einzelnen Zeilen darauf achten, dass man keine Zeile verändert, die man nicht gerade verrechnet, da das sonst Auswirkungen auf die Determinante hat.

Hat man nun die Dreiecksform, erhält man die Determinante durch Multiplikation der Diagonalenelemente:

$$\det(A_\Delta) = \prod_{k_1}^{k=n} a_{k,k}$$

(ii) Spezialfall 2×2 Matritzen

Bei 2×2 Matritzen gibt es eine Formel, einfacher an die Determinante zu kommen:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

3.2 Definitheit

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix A.
Gesucht: Definitheit von A

Eine allgemeine $n \times n$ Matrix A ist positiv/negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind > 0 bzw < 0.

Für 2×2 Matritzen lässt jedoch glücklicherweise sagen (A sei definiert wie oben):

- A positiv definit $\Leftrightarrow \det(A) > 0 \ \wedge \ a > 0$
- A negativ definit $\Leftrightarrow \det(A) > 0 \ \wedge \ a < 0$
- A indefinit $\Leftrightarrow \det(A) < 0$

3.3 Inverse Matrix

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix A.
Gesucht: A^{-1}

Eine Inverse Matrix A^{-1} zu einer Matrix A muss man sich wie die Inverse Zahl zu einer Zahl aus $\mathbb{R}$ vorstellen. Beispiel: $a \in \mathbb{R}; a = 5$, dann ist $a^{-1} = \frac{1}{5}$. Außerdem ist $a \cdot a^{-1} = \frac{5}{5} = 1$. Bei Matritzen ist das genauso: Multipliziert man die inverse Matrix mit ihrer original Matrix, so erhält man die Einheitsmatrix. A^{-1} berechnet sich, in dem man sich rechts die Einheitsmatrix dranhängt, und durch Umformungen versucht aus der eigentlichen Matrix die Einheitsmatrix zu erstellen. Alle Umformungsschritte müssen auf beiden Seiten durchgeführt werden. Am Ende erhält man so rechts die inverse Matrix!

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & 0 & 1 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Gauss}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 & b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{array}\right) = A^{-1}$$

3.4 Kern einer Matrix

Gegeben: Eine $n \times m$ Matrix A
Gesucht: $\mathrm{kern}(A)$

Der Kern einer Matrix A ist die Menge aller Vektoren v für die gilt, dass $A \cdot v = 0$. Löse also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & \ddots & a_{n,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = 0$$

Alle Lösungen für v bilden den Kern.

3.5 Charakteristisches Polynom

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix A
Gesucht: χ_A

Berechne

$$\chi_A = \det(A - xI)$$

wobei x eine Variable ist (fest), und I die Einheitsmatrix ist.

3.6 Eigenwerte

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix A
Gesucht: Alle Eigenwerte k von A

Berechne das charakteristische Polynom

$$\chi_A(x) = \det(A - xI)$$

Berechne alle Nullstellen des Polynoms, dies sind die Eigenewerte k.

Literatur

[1] DANIEL WINKLER, *Inoffizielles Skriptum zur Vorlesung „Höhere Mathematik für Informatiker"*, 2003, www.danielwinkler.de

[2] MERZIGER / WIRTH, *Repetitorium der Höheren Mathematik*, Binomi Verlag, 2002

[3] ALBRECHT BEUTELSPACHER, *Lineare Algebra*, Vieweg Verlag, 2003