Der Mysteriöse Grenzwert

Thomas Pajor

1. Juni 2005

Ich möchte hier einen Beweis liefern, dass die Funktion $f(n) = \frac{\log(n!)}{n \log n}$ für n gegen unendlich gerade gegen 1 strebt. Daraus folgt nämlich dass für sehr große n gilt dass $\log(n!) \approx n \log n$. Dies ist unter anderem beim Beweis der unteren Schranke für Sortieren relevant.

1 Vorüberlegungen und Ideen

Definition 1. *Die Abbildung* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sei wie folgt definiert*

$$n \mapsto \frac{\log(n!)}{n \log n}$$

Eine erste Betrachtung des Ausdruckes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n}$$

legte nahe den Satz von l'Hospital zu benutzen. Leider ist die Fakultät eine Abbildung $! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass sie nicht stetig differenzierbar ist. Die „Verallgemeinerung“ der Fakultät auf die Komplexen Zahlen liefert die Γ-Funktion [1]:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt \quad \text{wobei} \quad n! = \Gamma(n+1)$$

Das uneigentliche Integral macht die Sache jedoch nicht gerade einfacher.

Da wir allerdings sowieso eine Grenzwertbetrachtung durchführen, und daher nur große n betrachten, bot sich die Stirlingsche Formel an, die $n!$ approximiert.

2 Stirlingsche Formel

Lemma. *Für große n gilt die Abschätzung*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Der Beweis sei hier nicht erbracht.

Ferner gilt sogar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

Wir können in der Grenzwertbetrachtung unserer Funktion f also ruhig $n!$ durch die Stirlingsche Formel substituieren.

3 Grenzwert berechnen

Wir definieren uns eine Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$n \mapsto \frac{\log(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)}{n \log n} \qquad n > 0$$

Dabei ist die Fakultät durch die Stirlingsche Formel ersetzt worden. Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)}{n \log n}$$

Offensichtlich liefert dieser Ausdruck einen Grenzwert der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“. Da $g(n)$ für $n > 0$ stetig differenzierbar ist, können wir l’Hospital anwenden und erhalten somit:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n \log n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\log(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)\right)'}{(n \log n)'} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\frac{n}{e}\right)^n + \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\log\left(\frac{n}{e}\right)+1\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (\log n + 1)}\sqrt{2\pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n}\left(\log\left(\frac{n}{e}\right)+1\right)}{\sqrt{n}\cdot(\log n + 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}} + \sqrt{n}\log n}{\sqrt{n}\cdot(\log n + 1)} \qquad \Big| \cdot \frac{2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2n\log n}{2n\cdot(\log n + 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2n\log n}{2n + 2n\log n}
\end{aligned}$$

Man kann schon ahnen dass der Grenzwert 1 ist, wir wenden jedoch noch zwei mal l'Hospital an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n\log n}{2n+2n\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2+2\log n}{4+2\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\square$

Damit folgt dass für große $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n\log n \approx \log(n!)$$

Literatur

[1] BRONSTEIN / SEMENDJAJEW, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1979